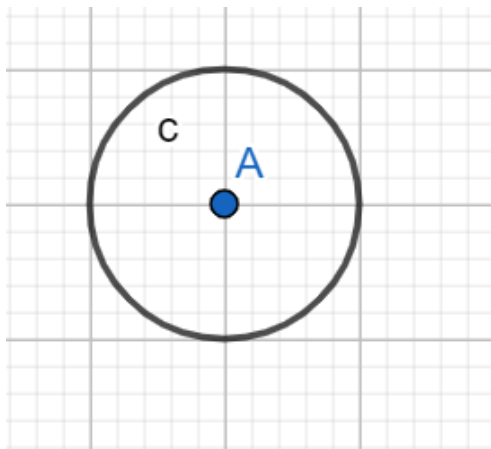


Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

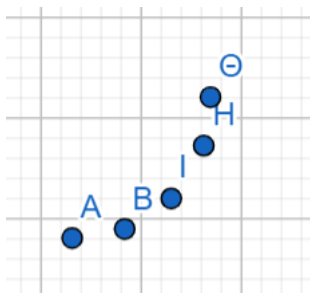
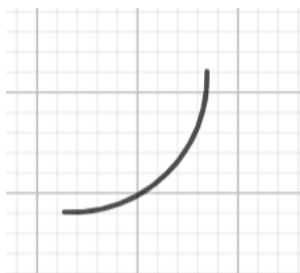
Τσαμπούκα Πετρούλα
ΣΕ Μαθηματικών
ΔΥΤΙΚΗΣ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

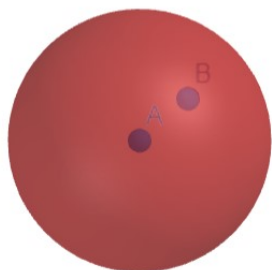


Κύκλος:

Είναι το **σύνολο των σημείων** του **επιπέδου** που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα δεδομένο σημείο το επιπέδου.

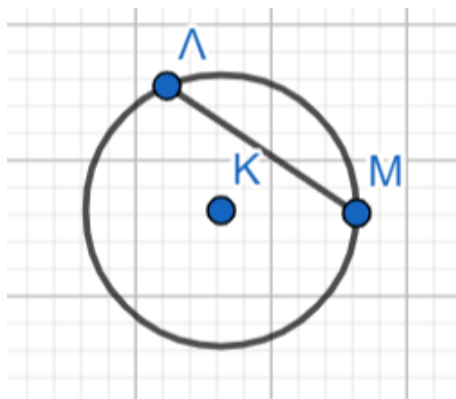


Τι σχήμα μπορεί να προκύψει αν στον ορισμό αναφέρω απλώς ότι είναι **σημεία του επιπέδου**;



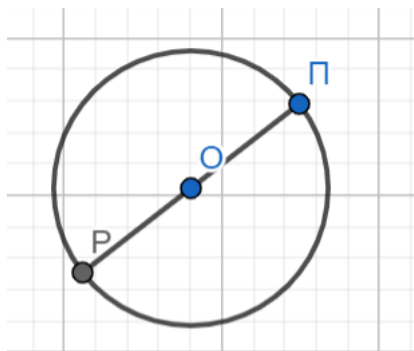
Τι σχήμα μπορεί να προκύψει αν παραλείψω ότι τα σημεία ανήκουν στο **επίπεδο**;

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



Χορδή:

Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου



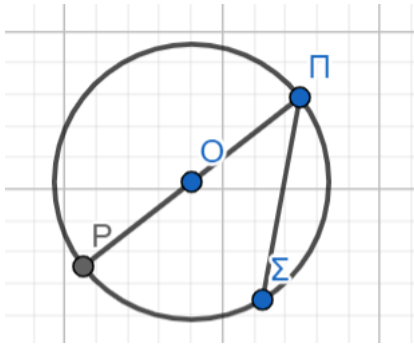
Διάμετρος:

Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου και διέρχεται από το κέντρο του.

Επαναδιατυπώστε τον ορισμό της διαμέτρου με χρήση του ορισμού της χορδής.

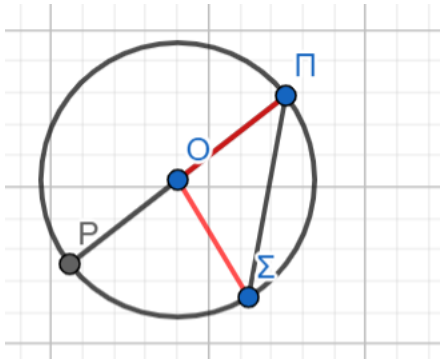
Χωρίς να πραγματοποιήσετε κάποια μέτρηση αλλά μόνο με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε μία χορδή που είναι μικρότερης της ακτίνας δοσμένου κύκλου και μία που να είναι μεγαλύτερη;

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



Μπορείτε να αποδείξετε ότι κάθε χορδή είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με τη διάμετρο του κύκλου;

Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας



$$ΠΡ = 2ρ$$

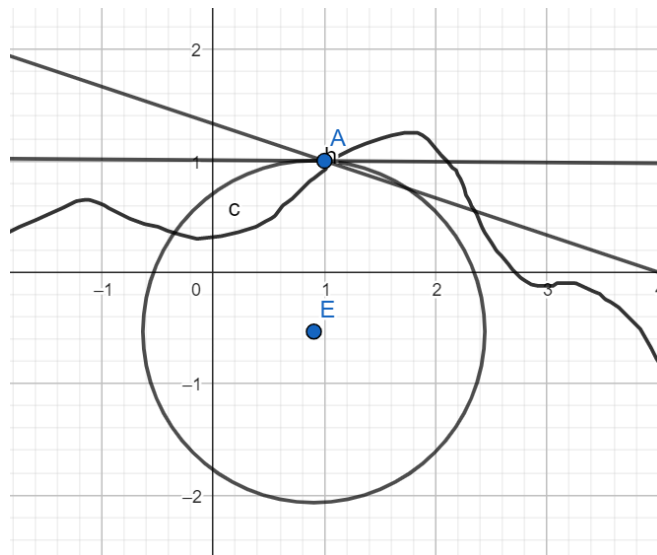
$$ΟΠ + ΟΣ = 2ρ$$

Στο τρίγωνο ΟΠΣ $ΟΠ + ΟΣ > ΠΣ$

Άρα $ΠΡ > ΠΣ$

- Ποια γεωμετρικά αντικείμενα του επιπέδου μπορούν να διέλθουν από ένα σημείο;

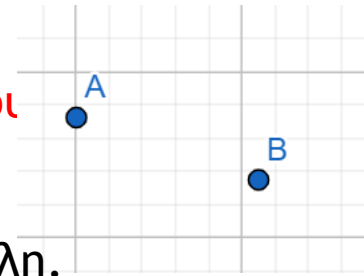
Μπορεί να διέλθει μία ευθεία, ένας κύκλος, μία καμπύλη.



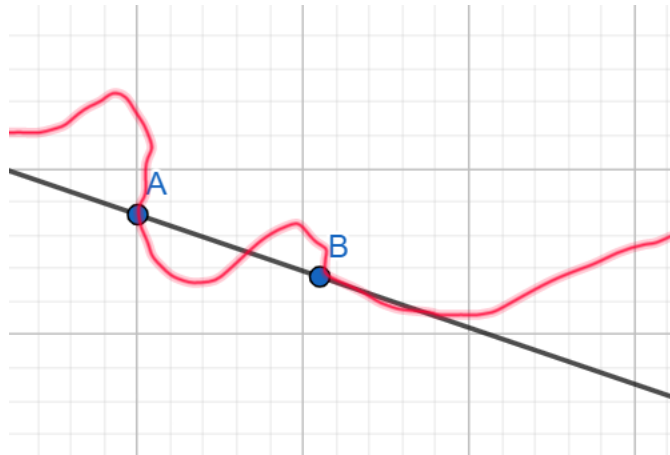
- Πόσα τέτοια γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να διέλθουν από ένα σημείο;

Άπειρα γεωμετρικά αντικείμενα.

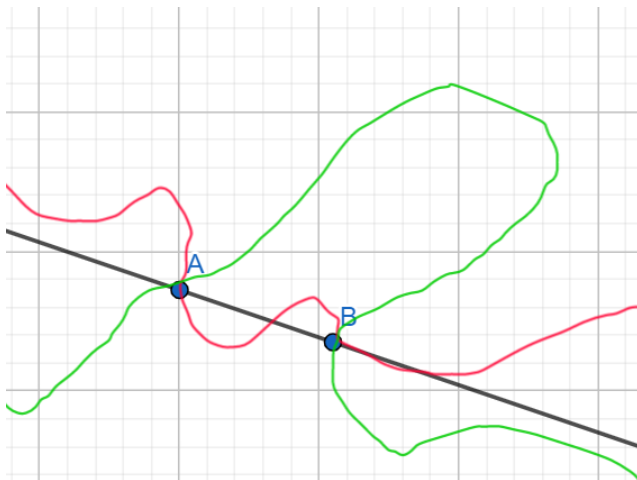
- Τι μπορεί να διέλθει από 2 σημεία του επιπέδου



Μπορεί να διέλθει μία ευθεία γραμμή, μία καμπύλη.



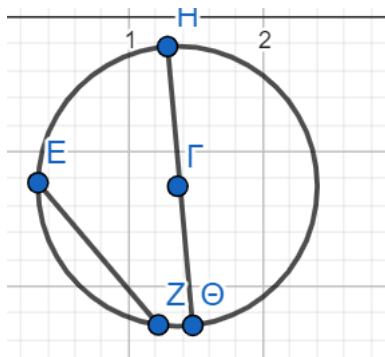
Πόσες ευθείες και πόσες καμπύλες μπορούν να διέλθουν;



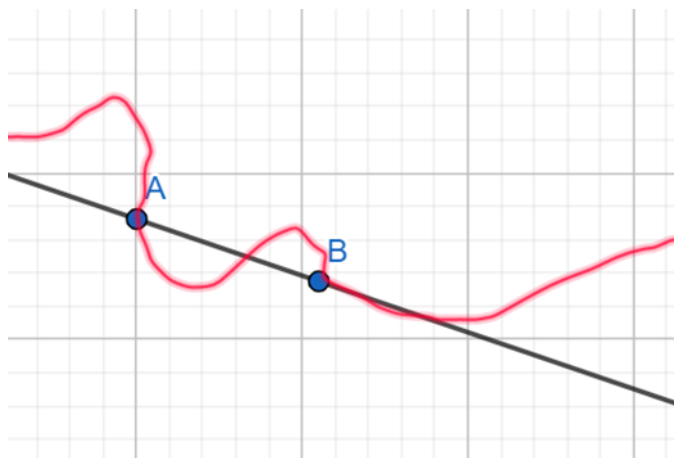
- Μοναδική ευθεία
- Άπειρες καμπύλες

Μπορεί να διέλθει ένας κύκλος από 2 σημεία του επιπέδου;

Ας θυμηθούμε κάποια στοιχεία του κύκλου.

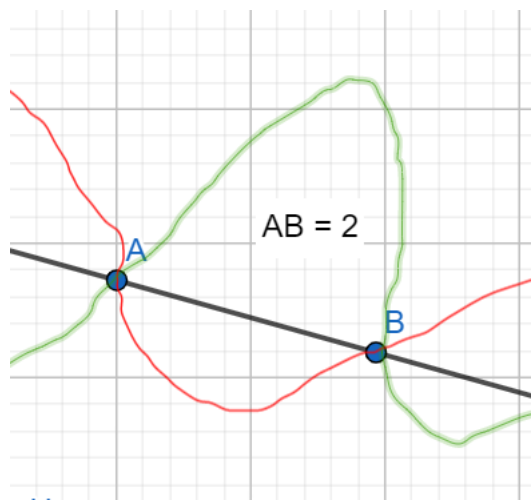


- EZ, HΘ χορδές του κύκλου
- HΘ χορδή του κύκλου με το μεγαλύτερο μήκος (διάμετρος)



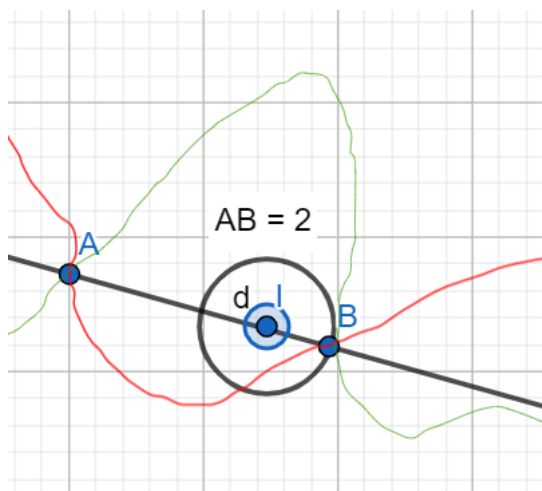
Αν θέλαμε να περάσουμε έναν κύκλο από τα σημεία Α, Β τι θα ήταν το ευθ. τμήμα για τον κύκλο αυτό;

ΑΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΟΥΜΕ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ



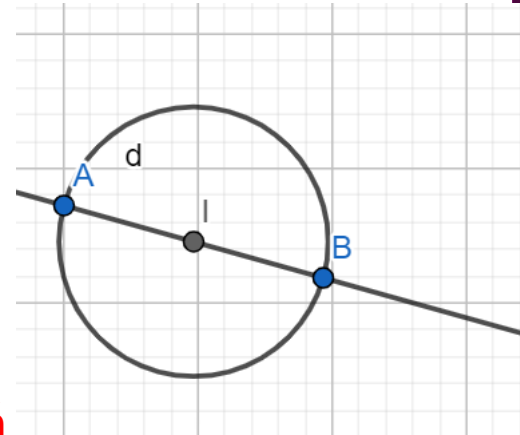
Το μήκος AB είναι 2.

Θα μπορούσε να περάσει ένας κύκλος με ακτίνα $\rho=0,5$ από τα σημεία A και B ;



Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει η διάμετρος του για να περνάει από τα σημεία και σ' αυτή την περίπτωση το ευθ. τμήμα AB τι θα ήταν στον κύκλο αυτό;

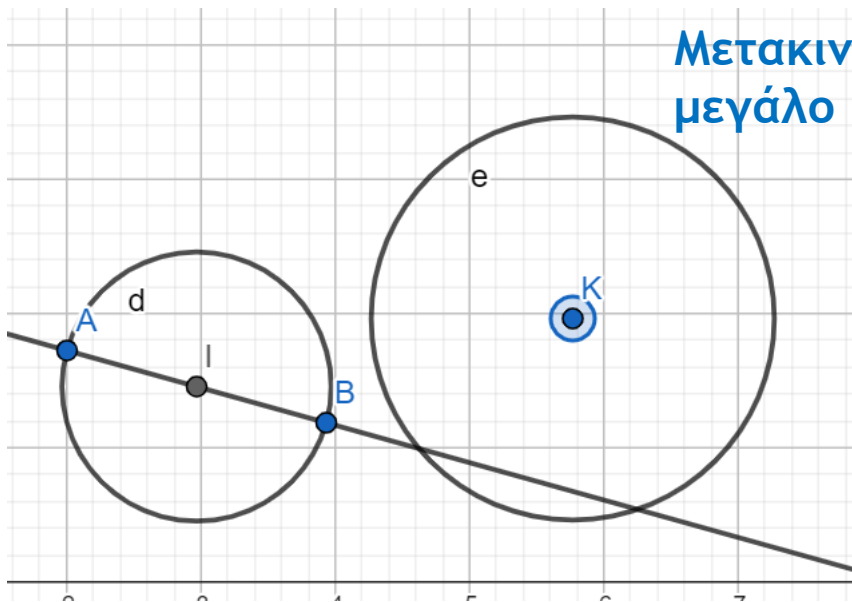
Άρα για να περάσει ο κύκλος από τα 2 σημεία πρέπει να έχει διάμετρο τουλάχιστον 2 και τότε το AB θα είναι μία διάμετρος του κύκλου .



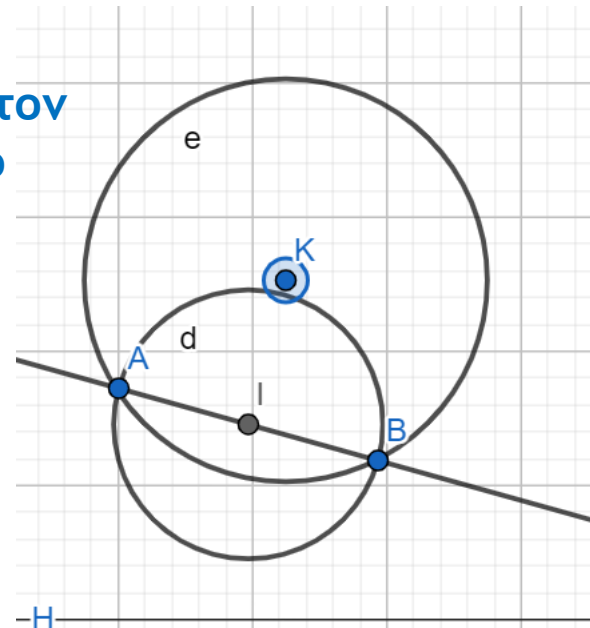
Τι περιορισμός ισχύει για τη διάμετρο του κύκλου για να αποτελεί ένα καθορισμένο ευθ. τμήμα χορδή του;

Συμπ: Η διάμετρος του κύκλου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το μήκος του ευθ. τμήματος.

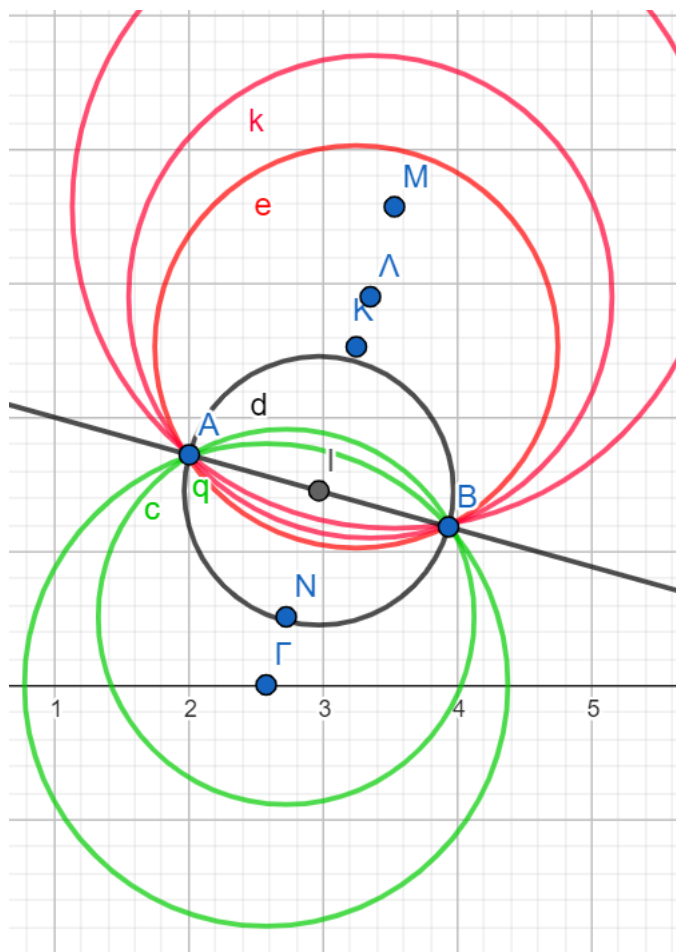
Μπορώ να περάσω έναν κύκλο με διάμετρο μεγαλύτερη από 2 από τα σημεία A και B;



Μετακινούμε τον μεγάλο κύκλο

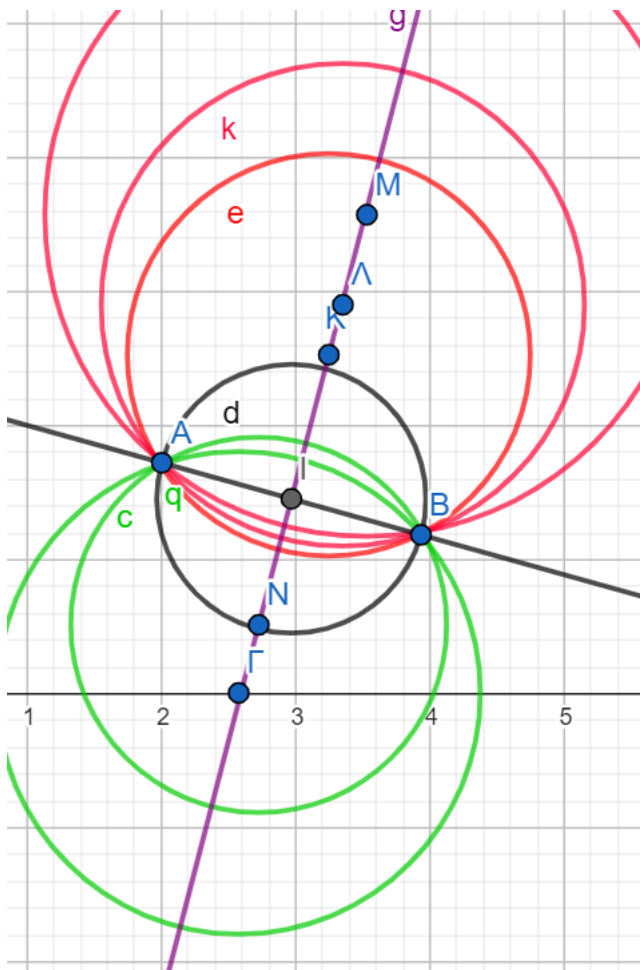


ΣΥΝΕΧΙΖΟΥΜΕ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΜΕ ΑΛΛΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥΣ



Τι μπορούμε να παρατηρήσουμε
για τα κέντρα των κύκλων;

Τι σχηματίζουν τα κέντρα των
κύκλων;

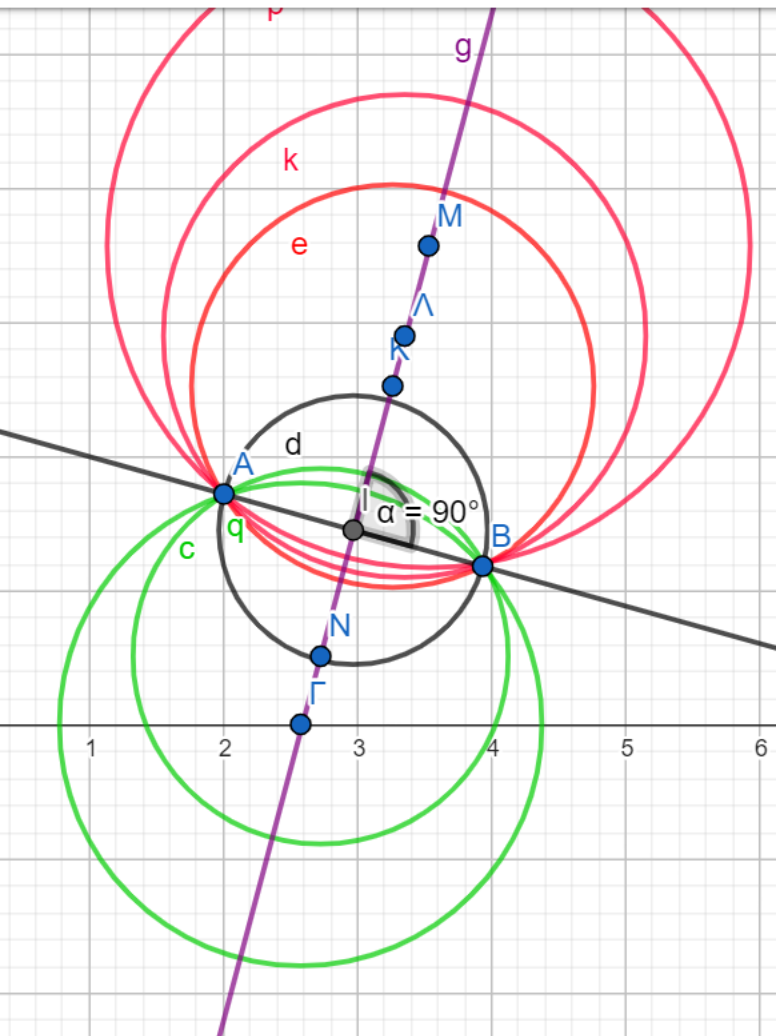


Τα κέντρα των κύκλων που διέρχονται από τα σημεία Α, Β βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία που περνά από το μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ.

Τι γωνία σχηματίζει η ευθεία πάνω στην οποία διατάσσονται τα κέντρα με το ευθ. τμήμα ΑΒ;

Μπορούν να αποδείξουν ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία;

Αποδεικνύεται είτε από ισότητα
τριγώνων είτε με αναφορά ότι
τα σημεία Α και Δ ανήκουν στη
μεσοκάθετο του ευθ. Τμήματος
ΒΓ.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από 2 σημεία στο επίπεδο
μπορούν να περάσουν άπειροι
κύκλοι.

Τι πρέπει να ισχύει για τους
κύκλους αυτούς;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Πόσα **κοινά** σημεία έχουν οι κύκλοι
μεταξύ τους;

Μόνο δύο.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ ΑΝ ΓΝΩΡΙΖΩ ΜΙΑ ΧΟΡΔΗ ΤΟΥ ΑΒ

Τα άκρα Α και Β της χορδής ΑΒ είναι σημεία του κύκλου.

Τι επιπλέον χρειάζεται να
ξέρω;

Εναλλακτικά

- Το κέντρο του κύκλου

Εναλλακτικά

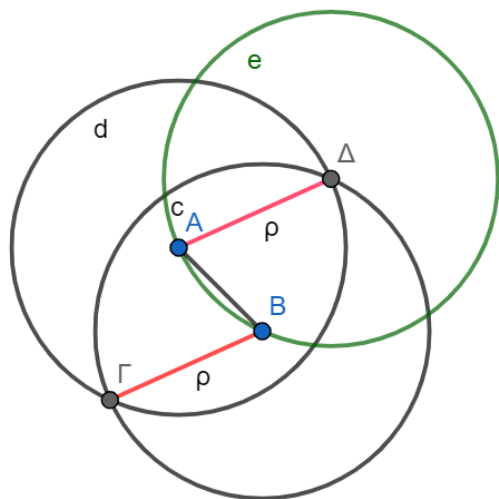
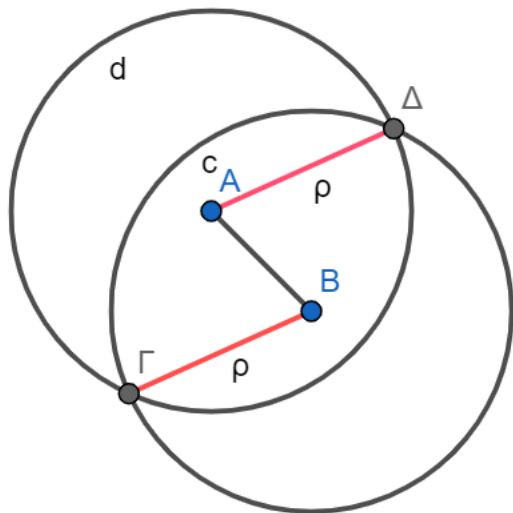
Τι επιπλέον χρειάζεται να
ξέρω;

- Ένα επιπλέον σημείο του κύκλου

Τι επιπλέον χρειάζεται να
ξέρω;

- Την ακτίνα του κύκλου (Μπορώ να τον σχεδιάσω;)

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ

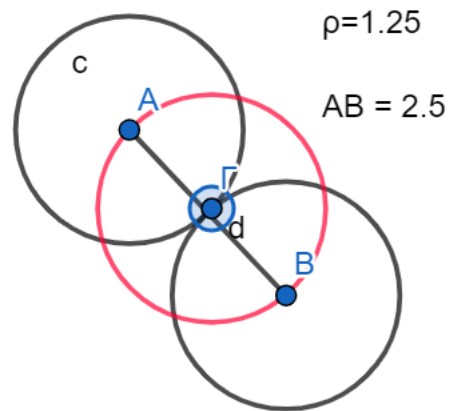
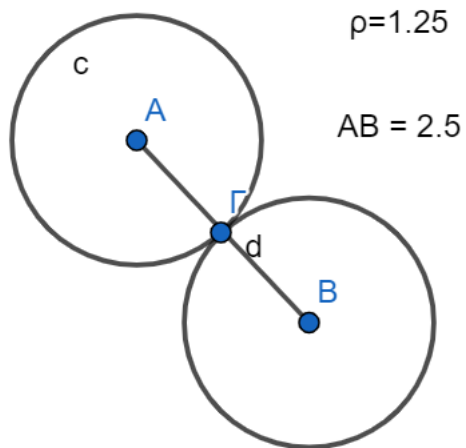


- Γνωρίζοντας την ακτίνα του κύκλου μπορούμε να σχεδιάσουμε το γεωμ. τόπο των σημείων που ισαπέχουν από τα 2 άκρα της χορδής απόσταση ίση με ρ .
- Ο γεωμ. τόπος είναι 2 κύκλοι με κέντρο το A και το B , αντίστοιχα και ακτίνα ρ .
- Το κέντρο του κύκλου που έχει ως χορδή την AB πρέπει απαραίτητα να ανήκει στους κύκλους c και d .
- Το κέντρο θα προκύψει από τα σημεία τομής των 2 κύκλων.

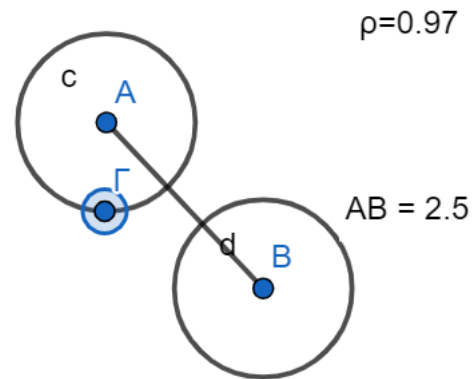
Πού ανήκουν τα κέντρα Γ και Δ ;

Στη μεσοκάθετο της χορδής AB .

Τι θα συμβεί αν η ακτίνα γίνει
το μισό της χορδής;

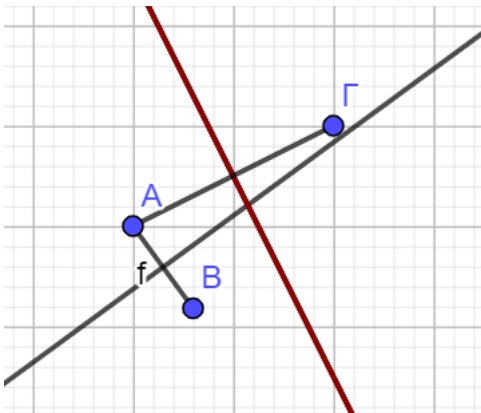
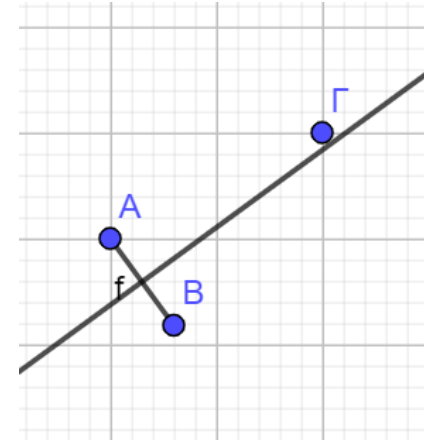


Τι θα συμβεί αν η ακτίνα γίνει μικρότερη από το μισό της χορδής;



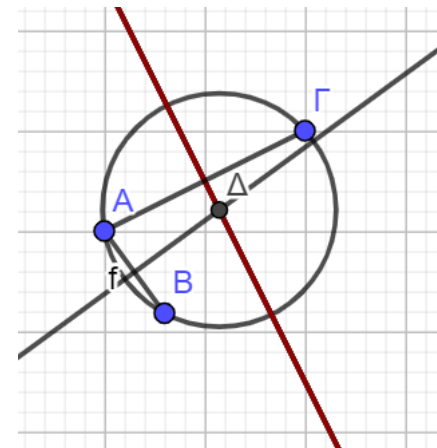
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΗ ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΣΗΜΕΙΟΥ

Πόσοι κύκλοι έχουν ως χορδή το ευθ. τμήμα AB;
Τι ισχύει για τα κέντρα αυτών των κύκλων;

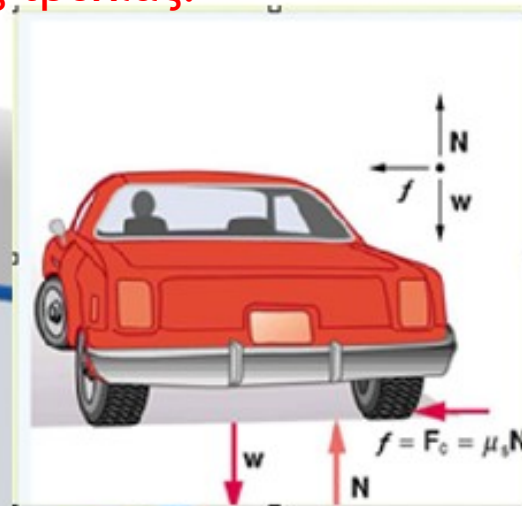


Πόσοι κύκλοι έχουν ως χορδή το ευθ.
τμήμα ΑΓ;
Τι ισχύει για τα κέντρα αυτών των
κύκλων;

Ποιο είναι το κέντρο του κύκλου που
έχει ως χορδές τα ευθ. Τμήματα AB
και ΑΓ;

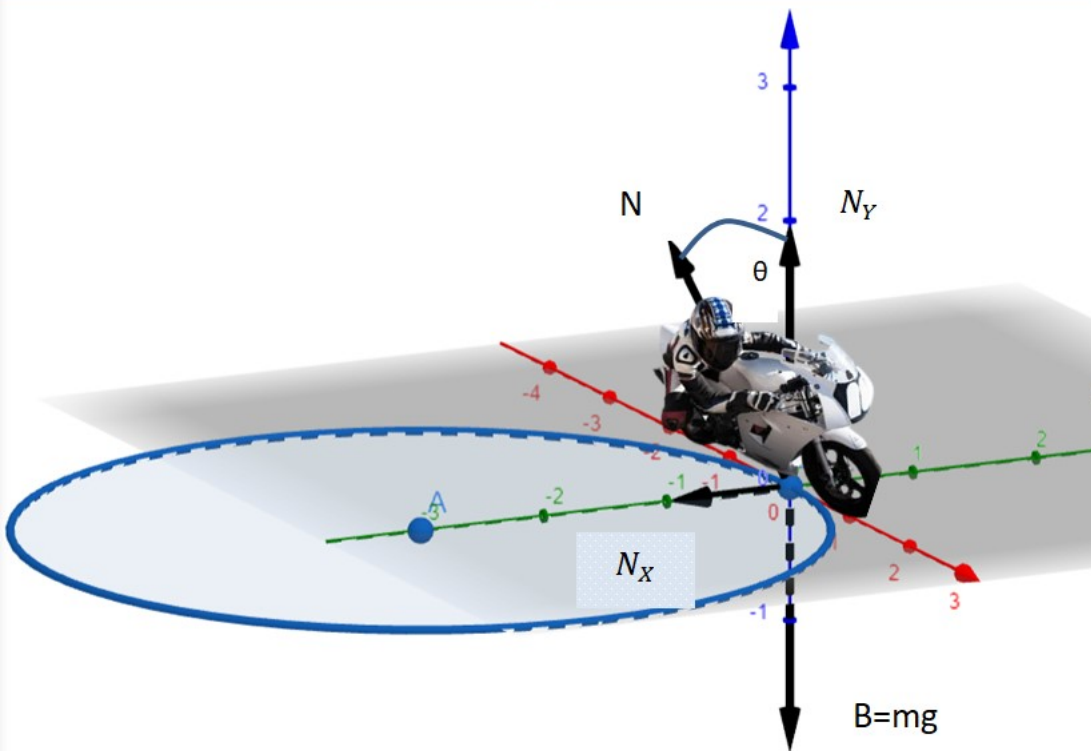


Για να μπορέσει το αυτοκίνητο να κινηθεί σε κυκλική τροχιά θα πρέπει να δέχεται δύναμη με διεύθυνση στο κέντρο του κύκλου. Η δύναμη αυτή ονομάζεται κεντρομόλος. Η απαιτούμενη δύναμη αυξάνεται καθώς είτε μεγαλώνει η ταχύτητα του αυτοκινήτου είτε μικραίνει η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.



Τη δύναμη αυτή την προσφέρει η τριβή στα ελαστικά η οποία εξαρτάται από το βάρος του αυτοκινήτου.

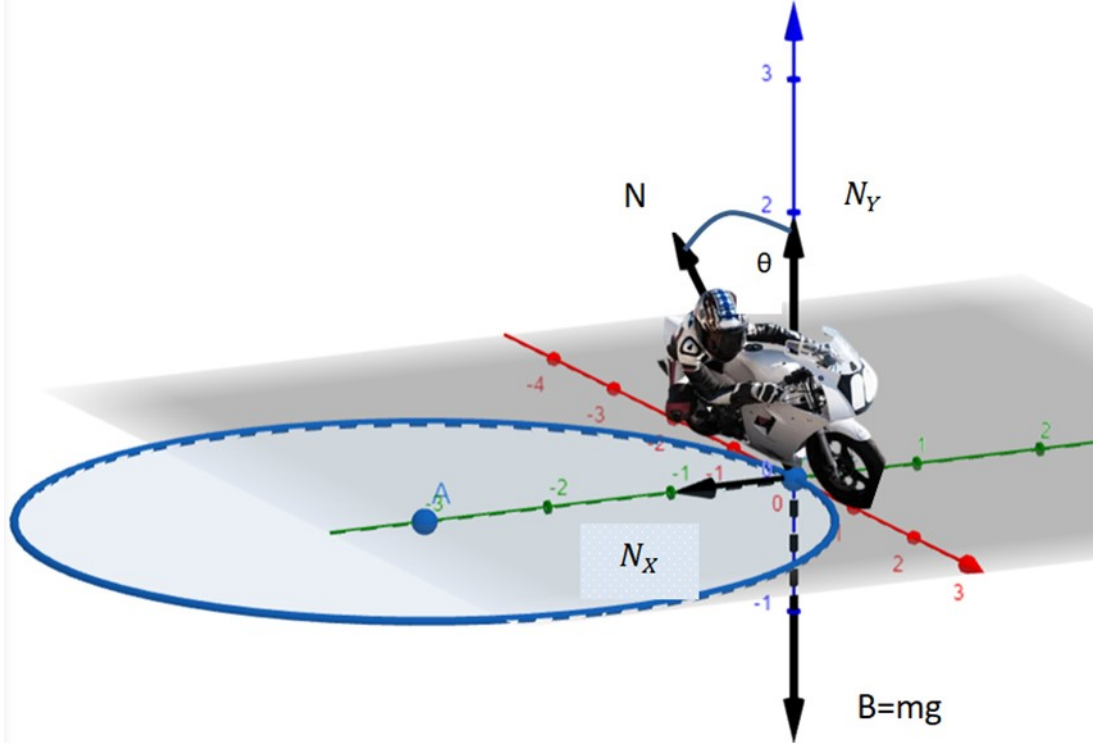




Η κεντρομόλος δύναμη που αναπτύσσεται και συγκρατεί τον μοτοσυκλετιστή σε κυκλική τροχιά θεωρούμε ότι οφείλεται μόνο στην κλίση θ που παίρνει ως προς την κατακόρυφο στο έδαφος.

Δε θεωρούμε δηλαδή ότι υπάρχει συνεισφορά από την τριβή. Αυτό αποτελεί ένα ρεαλιστικό σενάριο σε περίπτωση που έχουμε έναν πολύ ολισθηρό δρόμο (παγωμένος) και το κάνουμε για λόγους απλοποίησης.

Λόγω της κλίσης οδηγούμαστε στη συνιστώσα N_x της αντίδρασης N από το έδαφος η οποία δείχνει στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς και το μέτρο της θα καθορίσει τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει ο μοτοσυκλετιστής για να διατηρηθεί στην κυκλική τροχιά.



Συμβολισμοί

m: μάζα του σώματος

g: επιτάχυνση της βαρύτητας (σταθερά)

$$g = 9.81 \frac{m}{sec^2}$$

B: βάρος του σώματος

F_c : κεντρομόλος δύναμη

r: ακτίνα της τροχιάς

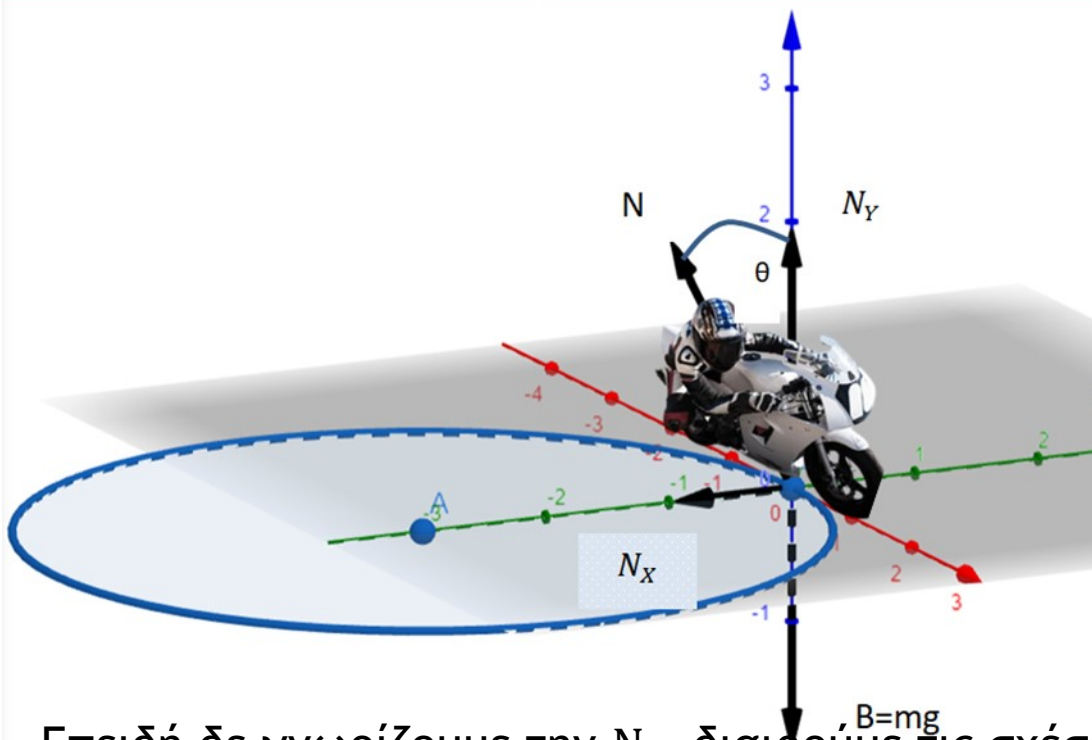
$$N_x = \frac{mv^2}{r} = F_c \quad (1)$$

Η N_x μας καθορίζει την ταχύτητα με την οποία μπορούμε να κινηθούμε με ασφάλεια.

Η ταχύτητα v και η ακτίνα της τροχιάς r καθορίζουν την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη που πρέπει να μας ασκείται για να κινούμαστε με αυτή την ταχύτητα σ' αυτήν την τροχιά.

Από τη σχέση (1) θα υπολογίσουμε τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα αρκεί να υπολογίσουμε την N_x που παίζει το ρόλο της κεντρομόλου καθώς είναι μία δύναμη με διεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου.

Επίσης γνωρίζουμε ότι $N_y = B = mg$ Γνωστές οι τιμές των m , g , r , θ



$$N_x = \frac{mv^2}{r} = F_c \quad (1)$$

$$N_y = B = mg \quad (2)$$

Επειδή δε γνωρίζουμε την N_x διαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και προκύπτει

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{v^2}{rg} \quad (3)$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι $\frac{N_x}{N_y} = \varepsilon\varphi\theta \quad (4)$

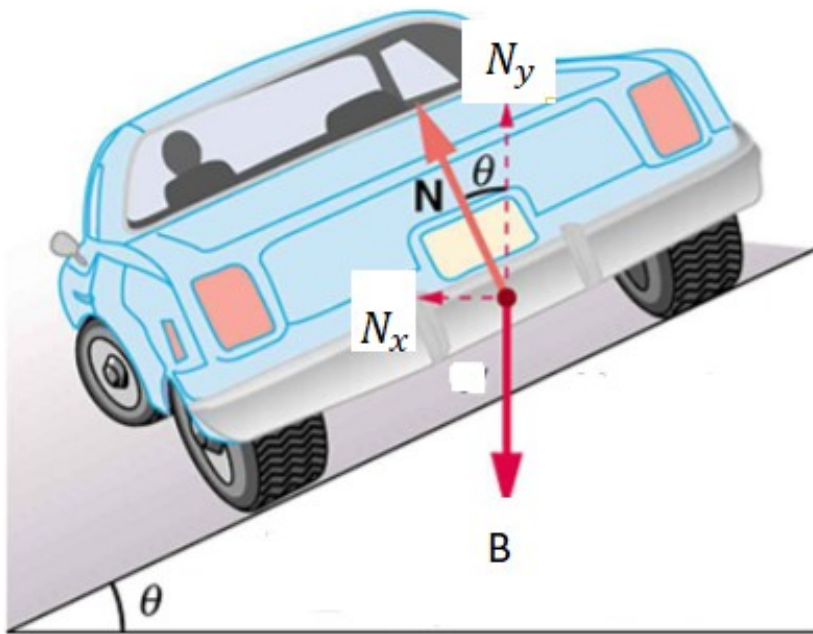
Συνδυάζοντας την (3) και την (4) παίρνουμε $\varepsilon\varphi\theta = \frac{v^2}{rg} \Leftrightarrow v^2 = rg\varepsilon\varphi\theta$ από την οποία μπορούμε να δούμε την εξάρτηση που έχει η ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή από την κλίση που παίρνει και από το πόσο μικρή είναι η ακτίνα του κύκλου πάνω στον οποίο κινείται.

Παρατηρούμε την ανεξαρτησία που έχει η ταχύτητα από τη μάζα του σώματος.



For the majority of NASCAR races,





Σε αντίστοιχα αποτελέσματα θα καταλήξουμε αν θεωρήσουμε ότι ο δρόμος έχει κλίση θ .

Η κλίση αυτή θ οδηγεί σε μία συνιστώσα N_x με κατεύθυνση στο κέντρο της τροχιάς.

Και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει $v^2 = r g \epsilon \phi \theta$ (5)

Για να βρούμε την κεντρομόλο δύναμη που μπορεί να μας εξασφαλίσει η κλίση που παίρνει ο μοτοσυκλετιστής ή η κλίση που έχει το οδόστρωμα, θα υπολογίσουμε τη N_x από τη σχέση

$$N_x = \frac{mv^2}{r} = F_c$$

F_c η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη που εξαρτάται από τη v και r

Αντικαθιστώντας το v^2 από τη σχέση (5) παίρνουμε ότι

$$N_x = m g \epsilon \phi \theta$$



Σχεδίαση της εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών του προβλήματος

Μεταβλητές: θ , r , m , u , F

Σταθερά: $g=9.81 \frac{m}{sec^2}$

1. Με δεδομένη την καμπυλότητα r του δρόμου και τη μάζα του αυτοκινήτου να σχεδιάσετε την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη F σε σχέση με την ταχύτητα u (Να θέσετε όπου $r=10m$ και $m=300 \text{ kg}$). Για τη σχεδίαση να μη χρησιμοποιήσετε τον τύπο αλλά να δώσετε κατάλληλη συνάρτηση που το γράφημα της να έχει ακτίνα καμπυλότητας $r=10m$ και να πάρετε τα δεδομένα από την εφαρμογή της geogebra.)

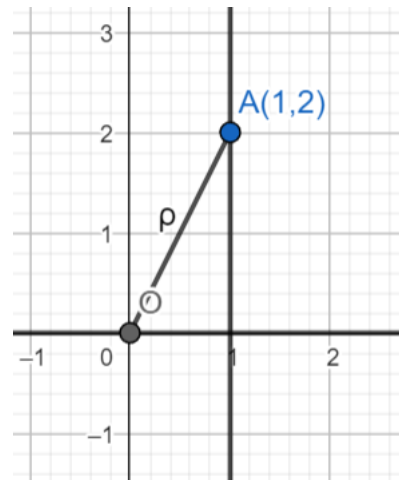
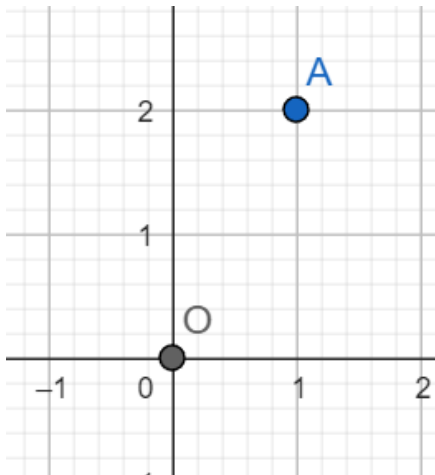
Ερ. Ποια καμπύλη πρέπει να σχεδιάσουμε που να έχει σταθερή καμπυλότητα;

Απ. Έναν κύκλο

Ερ. Τι χαρακτηριστικό έχουν τα σημεία ενός κύκλου

Έστω ότι το σημείο A ανήκει σε ένα κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$

Ερ. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A; Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα αυτού του κύκλου;

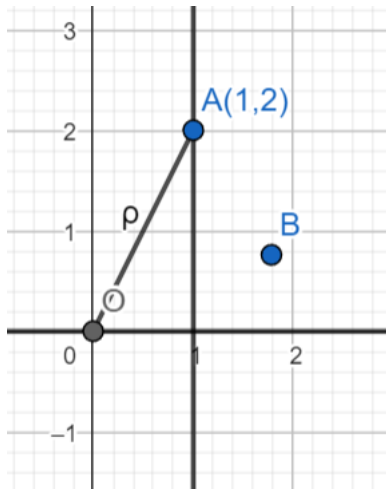


Από Πυθαγόρειο
Θεώρημα έχουμε
ότι

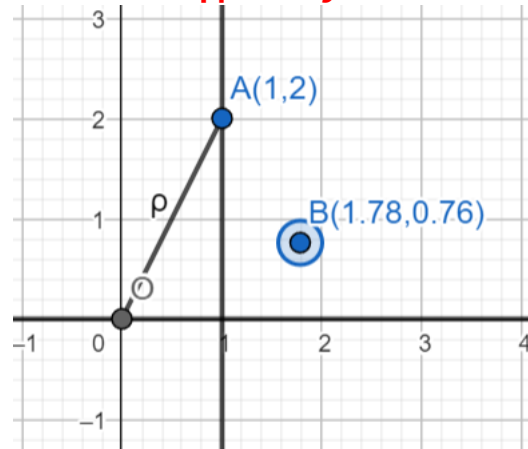
$$\rho^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\text{Άρα } \rho = \sqrt{5}$$

Ερ. Ανήκει το σημείο Β στον ίδιο κύκλο με το σημείο Α; Πώς μπορούμε να το ελέγξουμε;

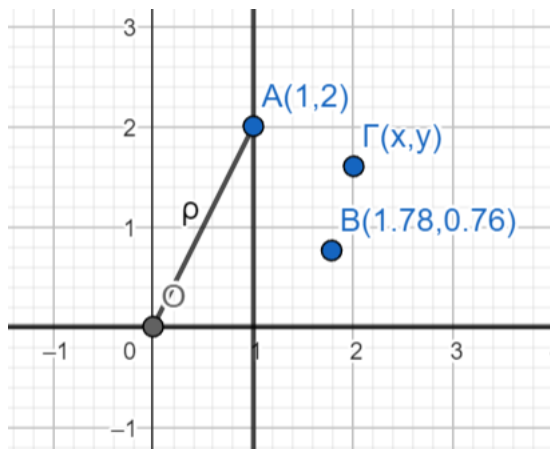


Απ. Υπολογίζουμε ξανά την ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Ο στον οποίο ανήκει από τις συντεταγμένες του.



$$\rho^2 = 1,78^2 + 0,76^2 \\ = 3,746$$

Ερ. Τι πρέπει να ισχύει για ένα τυχαίο σημείο Γ για να ανήκει στον ίδιο κύκλο με το σημείο Α;



Απ. $\rho^2 = x^2 + y^2$
 $25 = x^2 + y^2 \quad (1)$

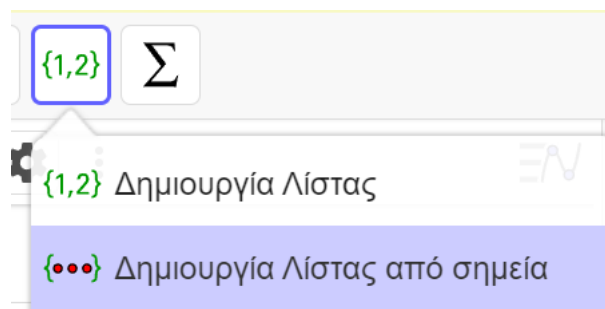
Ερ. Ποια συνάρτηση μπορούμε να κατασκευάσουμε από την εξίσωση 1;

Θέτουμε την κατάλληλη συνάρτηση, καθορίζουμε τη μάζα και δίνοντας διάφορες τιμές στην ταχύτητα παίρνω τιμές για την κεντρομόλο δύναμη F .

	A	B
1	u	F
2	5	57.87
3	10	231.48
4	15	520.83
5	20	925.93
6	25	
7	30	
8	35	

Συμπληρώνω τα ζευγάρια τιμών σε ένα λογιστικό φύλλο της geogebra και κατασκευάζω τη λίστα των σημείων.

Μαρκάρω τις τιμές που θέλω να συμπεριλάβω στη λίστα



$$l1 = \{A, B, \Gamma, \Delta\}$$

$$= \{(5, 57.87), (10, 231.48), (15, 520.83), (20, 925.93)\}$$

$$l1 = \{A, B, \Gamma, \Delta\}$$

$$= \{(5, 57.87), (10, 231.48), (15, 520.83), (20, 925.93)\}$$



Χρησιμοποιώ τη συνάρτηση της geogebra **fitpoly(l1,k)**, όπου k παράμετρος που παίρνει ακέραιες τιμές και καθορίζει το βαθμό του πολυωνυμικής συνάρτησης με το γράφημα της οποίας προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε τη σχέση που έχουν τα σημεία μας.

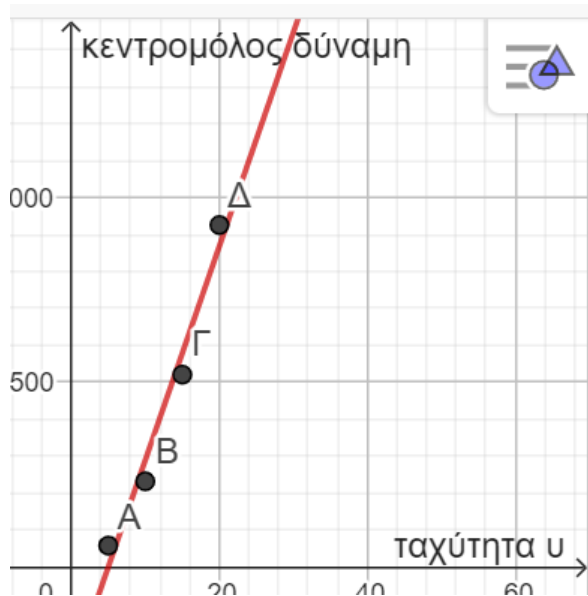


Αρχικά θέτω $k=1$ και εκτελώ την εντολή

```
fitpoly(l1, 1)
```

Θεωρώ ότι τα σημεία μου βρίσκονται πάνω σε ευθεία γραμμή, δηλαδή θεωρώ ότι τα σημεία μου προέρχονται από μία συνάρτηση της μορφής

$y = ax + b$, όπου a και b **παράμετροι** που θα καθορίσει το πρόγραμμα με στόχο η ευθεία να βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο κοντά στα σημεία που δώσαμε.



Ερ. Ανήκουν όλα τα σημεία στην ευθεία;

Ερ. Τι θα προτείνατε να κάνουμε για να περιγράψουμε καλύτερα τη μεταβολή των σημείων;

Θέτω στη συνέχεια $k=2$ και εκτελώ την εντολή

```
fitpoly(l1, 2)
```

Θεωρώ ότι τα σημεία βρίσκονται πάνω στη γραφική παράσταση συνάρτησης που έχει τη μορφή

$$y = ax^2 + bx + \gamma,$$

όπου a και b και γ

παράμετροι που θα καθορίσει το πρόγραμμα με στόχο η γραφική παράσταση της συνάρτησης να βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο κοντά στα σημεία που δώσαμε.

Αφού γνωρίζουμε τη συνάρτηση που συνδέει την ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή με την κεντρομόλο δύναμη που απαιτείται **απεικονίστε τη γραφική της παράσταση, με τη βοήθεια της geogebra** για να ελέγξετε αν ταυτίζεται με τη γραφ. παρ. που διέρχεται από τα σημεία.





Χρησιμοποιούμε τον τύπο $F_c = \frac{mv^2}{r}$,
όπου $m=300\text{kg}$ και $r=10\text{ m}$

Ερ. Γιατί υπάρχει αυτή η απόκλιση; Είναι προφανές ότι η συνάρτηση δεν περιγράφει καλά τα δεδομένα.

Παρατηρώντας τις 2 γραφ. παρ. (μπλε και κόκκινη) θεωρείτε ότι και οι δύο έχουν **εξάρτηση από το τετράγωνο της ταχύτητας** (παριστάνουν δηλ. παραβολή);



Ερ. Σε τι διαφέρει η μπλε από την κόκκινη γραφική παράσταση;

Είναι το σφάλμα μας πολλαπλασιαστικό, δηλαδή αν βρούμε κατάλληλη τιμή ε και διορθώσουμε τον τύπο έτσι ώστε $F_c = \varepsilon \frac{mv^2}{r}$ θα πετύχουμε η μπλε καμπύλη να ταυτιστεί με την κόκκινη;

Ή θεωρείτε ότι το σφάλμα είναι αθροιστικό και ο διορθωμένος τύπος πρέπει να είναι της μορφής $F_c = \frac{mv^2}{r} + \varepsilon$;



Απ. Το σφάλμα είναι
πολλαπλασιαστικού τύπου και
οφείλεται στις μονάδες.

Σχεδιάσαμε την κεντρομόλο δύναμη
σαν συνάρτηση της ταχύτητας
εκφρασμένης σε km/h.

Ο τύπος της κεντρομόλου που
χρησιμοποιήσαμε $F_c = \frac{mv^2}{r}$
περιλαμβάνει την ταχύτητα σε
μονάδες m/sec.

Άρα $\varepsilon = \left(\frac{1}{3,6}\right)^2$ και ο τύπος με τη
διόρθωση γίνεται

$$F_c = \left(\frac{1}{3,6}\right)^2 \frac{mv^2}{r}$$

Να σχεδιάσετε την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη σε σχέση με την ταχύτητα θεωρώντας ως **παράμετρο την καμπυλότητα r** του δρόμου και δίνοντας σ' αυτήν διάφορες τιμές στο εύρος **10-100m**.

$$F_c = \frac{300v^2}{r}, \text{ αν } v \text{ εκφράζεται σε } \frac{m}{sec} \quad F_c = \left(\frac{1}{3.6}\right)^2 \frac{300v^2}{r}, \text{ αν } v \text{ εκφράζεται σε } \frac{km}{h}$$

Χρησιμοποιούμε τη 2^η έκφραση για την κεντρομόλο δύναμη στη geogebra παραλείποντας την ακτίνα από τον παρονομαστή

$$\begin{aligned} p(x) &= A \nu \left(x \geq 0, \left(\frac{1}{3.6} \right)^2 \cdot 300 x^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{3.6} \right)^2 \cdot 300 x^2, \quad (x \geq 0) \end{aligned}$$

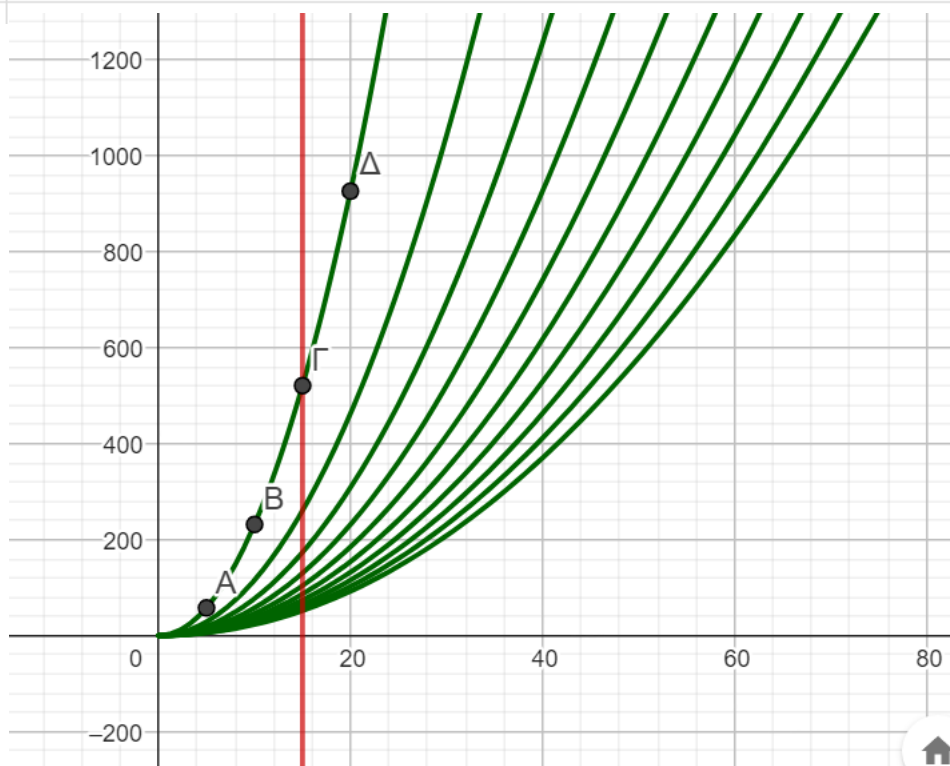
Πώς σχεδιάζουμε στη geogebra παραμετρικές καμπύλες;

Χρησιμοποιούμε την εντολή που κατασκευάζει **αριθμητική ακολουθία** με αρχική τιμή 10, τελική τιμή 100 και βήμα 10

$$\begin{aligned} l2 &= \text{Ακολουθία}(k, k, 10, 100, 10) \\ &= \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\} \end{aligned}$$

Διαιρούμε τη συνάρτηση μας με την ακτίνα r υπό μορφή λίστας

$$F = \frac{p}{l^2}$$
$$= \begin{cases} A \nu \left(x \geq 0, \left(\frac{1}{3.6} \right)^2 \cdot 300 x^2 \right) & , \quad A \nu \left(x \geq 0, \left(\frac{1}{3.6} \right)^2 \cdot 300 x^2 \right) \\ 10 & , \quad 20 \end{cases}$$



Ερ. Τι συμπέρασμα
βγάζουμε για την
κεντρομόλο δύναμη που
απαιτείται σε σχέση με την
ακτίνα καμπυλότητας για
την ίδια ταχύτητα;

Σχεδίαση της εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών του προβλήματος

Μεταβλητές: θ , r , m , u , F

Σταθερά: $g=9.81\frac{m}{sec^2}$

2. Με δεδομένη την κλίση θ του μοτοσυκλετιστή να σχεδιάσετε τη μέγιστη ταχύτητα u του μοτοσυκλετιστή σαν συνάρτηση της ακτίνας καμπυλότητας r .

Επαληθεύστε το γράφημα που προέκυψε με το γράφημα της συνάρτησης που συνδέει την μέγιστη ταχύτητα με την ακτίνα καμπυλότητας.

3. Με δεδομένη την ακτίνα καμπυλότητας του δρόμου να σχεδιάσετε τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα u σαν συνάρτηση της κλίσης θ του μοτοσυκλετιστή.

4. Να σχεδιάσετε την ακτίνα καμπυλότητας σε σχέση με τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα για διάφορες τιμές της κλίσης θ .

Σχεδίαση της εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών του προβλήματος

Μεταβλητές: θ , r , m , u , F

Σταθερά: $g=9.81 \frac{m}{sec^2}$

Με δεδομένη την κλίση θ του μοτοσυκλετιστή να σχεδιάσετε τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα u του μοτοσυκλετιστή σαν συνάρτηση της ακτίνας καμπυλότητας r .

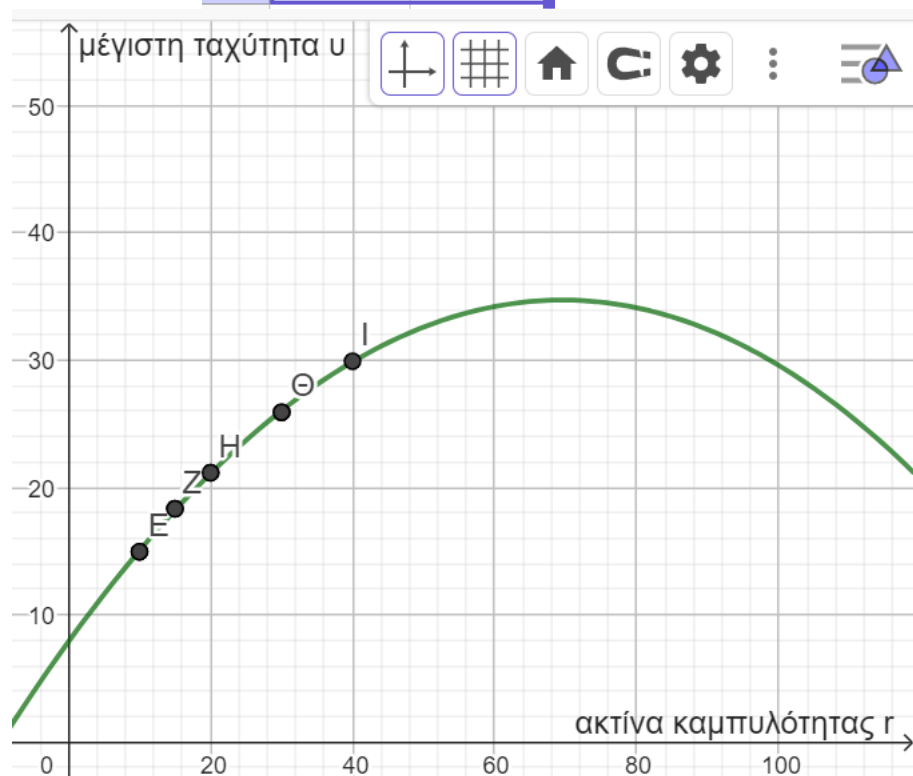
Επαληθεύστε το γράφημα που προέκυψε με το γράφημα της συνάρτησης που συνδέει την μέγιστη ταχύτητα με την ακτίνα καμπυλότητας.

Μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή για την ταχύτητα ώστε να διατηρήσει την κίνηση πάνω στη στροφή μεταβάλλοντας την ακτίνα στη συνάρτηση κύκλου που δώσαμε.

Μπορούμε βρούμε τη μέγιστη τιμή για την ταχύτητα ώστε να διατηρήσει την κίνηση πάνω στη στροφή μεταβάλλοντας την ακτίνα στη συνάρτηση κύκλου που δώσαμε

	A	B
1	r	u
2	10	14.96
3	15	18.33
4	20	21.16
5	30	25.92
6	40	29.93

Αφού δημιουργήσουμε τη λίστα από τα σημεία προσαρμόζουμε σ' αυτά ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού με τη fitpoly



Ερ. Πως εξελίσσεται η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας;

Αυξάνει γραμμικά, πιο γρήγορα ή πιο αργά;

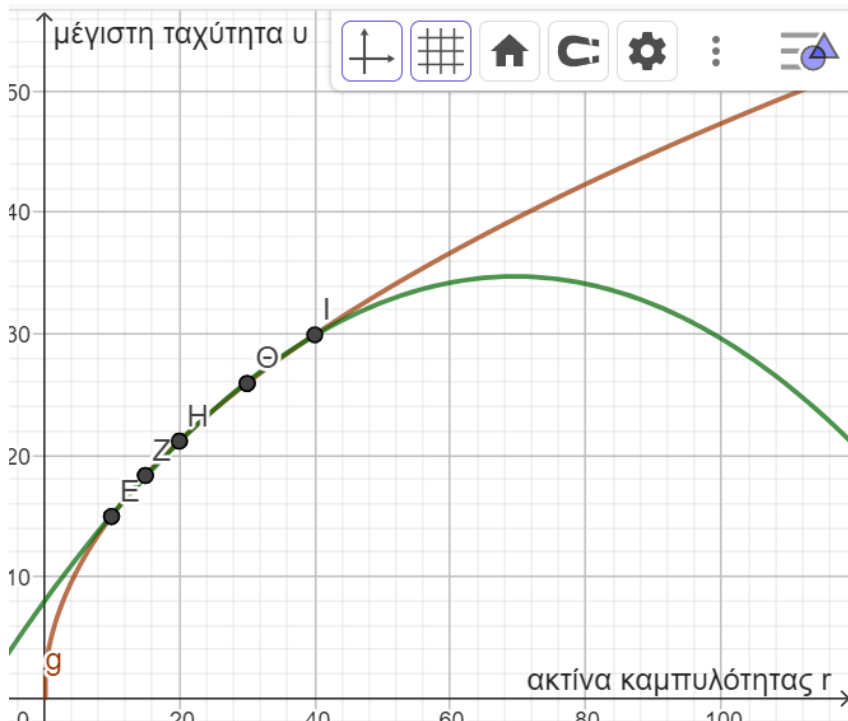
$$v^2 = r g \varepsilon \varphi \theta \Rightarrow v = \sqrt{r g \varepsilon \varphi \theta}$$

Θέτουμε $g=9.81$ και επιλέγουμε για κλίση του δρόμου 10 μοίρες.

$$v = \sqrt{9,81 \varepsilon \varphi 10^\circ} r \frac{m}{sec}$$

$$v = 3,6 \sqrt{9,81 \varepsilon \varphi 10^\circ} r \frac{km}{h}$$

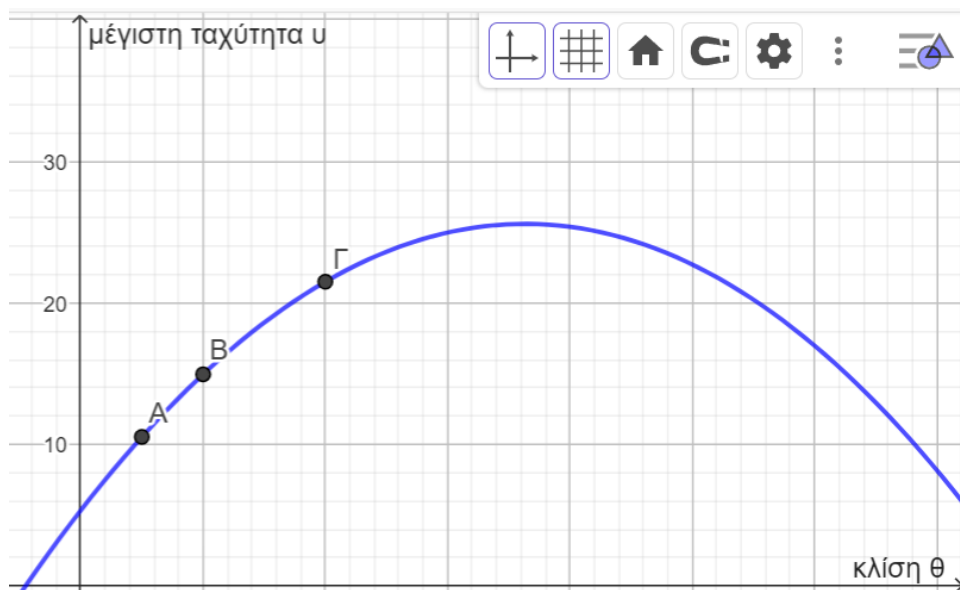
Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση v σαν συνάρτηση της r



Ερ. Τι παρατηρήσεις κάνουμε σε σχέση με τις 2 γραφικές παραστάσεις;

Συμπίπτουν στην περιοχή των σημείων αλλά αποκλίνουν εκτός. Γιατί;

Με δεδομένη την ακτίνα καμπυλότητας του δρόμου να σχεδιάσετε τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα u σαν συνάρτηση της κλίσης θ του μοτοσυκλετιστή.



	A	B
theta	u	
5	10.54	
10	14.96	
20	21.5	

Προσαρμόζουμε στα σημεία
ένα πολύωνυμο 2^{ου} βαθμού

Με δεδομένη την ακτίνα καμπυλότητας του δρόμου να σχεδιάσετε τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα u σαν συνάρτηση της κλίσης θ του μοτοσυκλετιστή.

Επιλέγουμε ως ακτίνα καμπυλότητας 10 μέτρα. Οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο

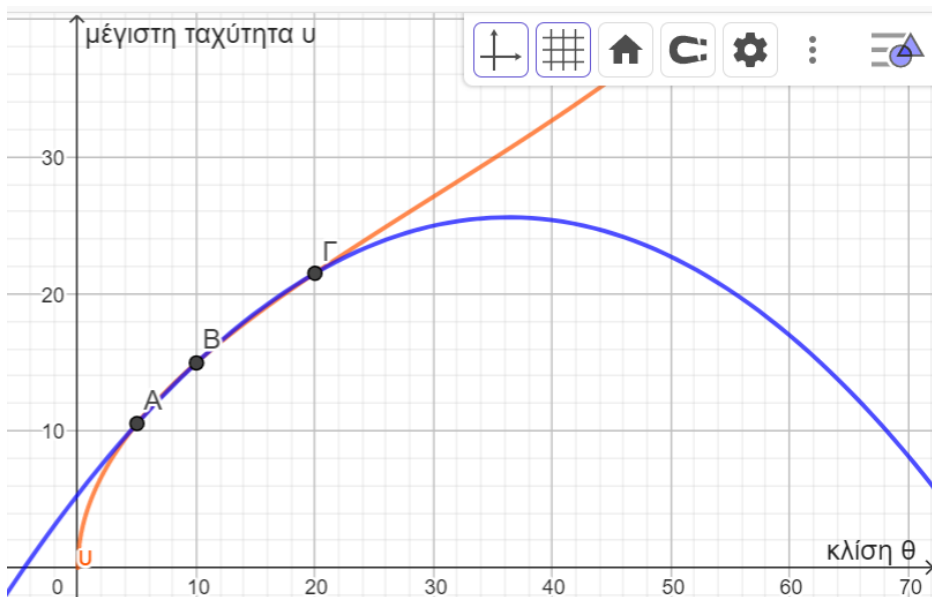
$$u = \sqrt{r g \epsilon \varphi \theta} \text{ παίρνουμε}$$

$$v = \sqrt{10 \cdot 9,81 \epsilon \varphi \theta}$$

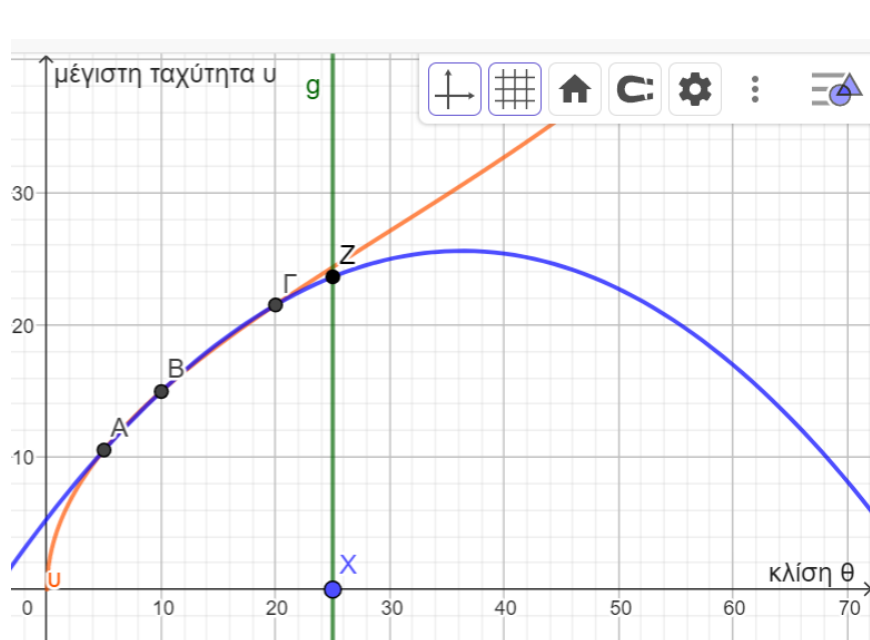
Και με τη διόρθωση στις μονάδες της ταχύτητας ο τύπος γίνεται

$$v = 3,6 \sqrt{10 \cdot 9,81 \epsilon \varphi \theta}$$

Ερ. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις 2 γραφικές παραστάσεις; Περιγράφεται η εξάρτηση της ταχύτητας u από την κλίση θ από μία πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού;



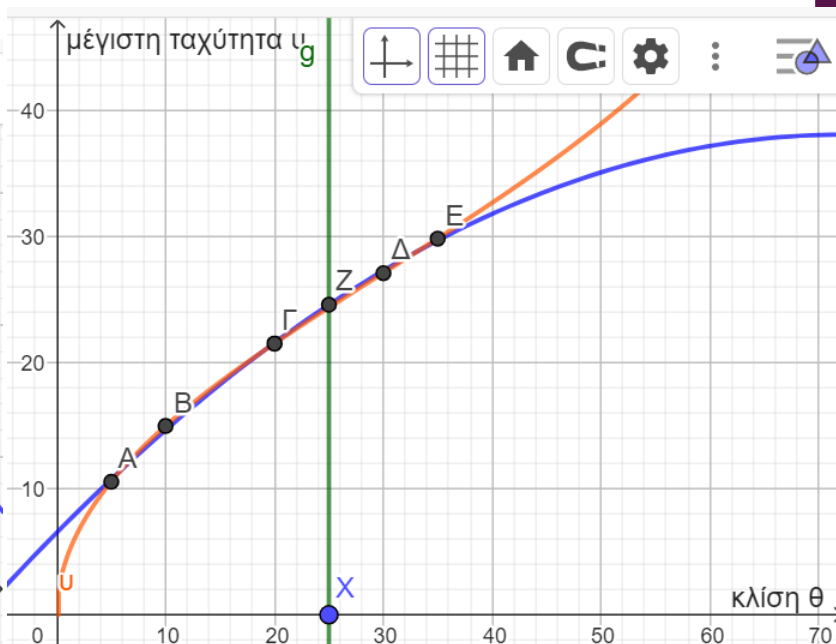
Με τις αρχικές μετρήσεις



Ποια είναι η εκτίμησή μας για την ταχύτητα για $\theta = 25^\circ$;

$u = 23,62 \text{ km/h}$

Κάνοντας περισσότερες μετρήσεις



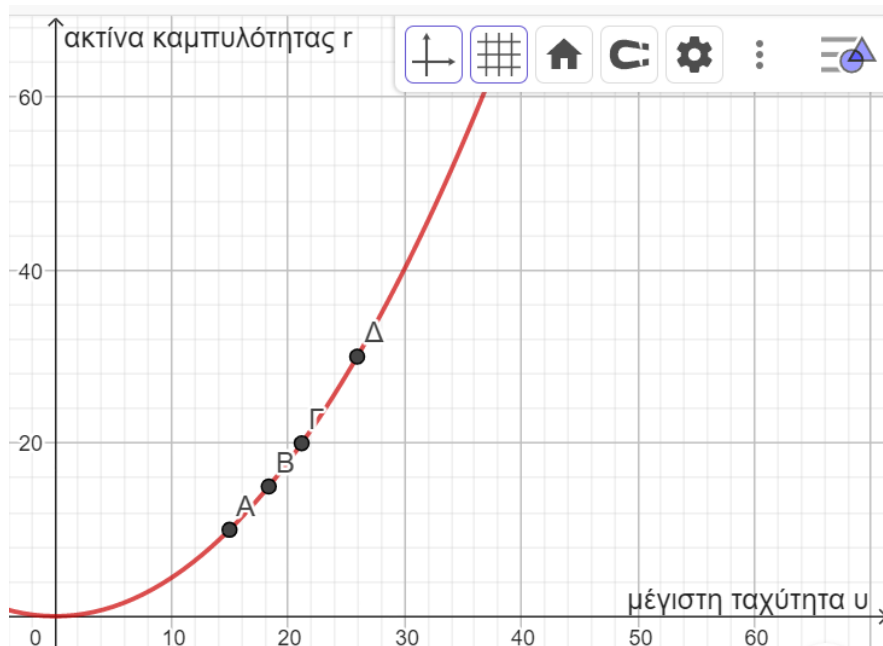
Ποια είναι η εκτίμησή μας για την ταχύτητα για $\theta = 25^\circ$;

$u = 24,57 \text{ km/h}$

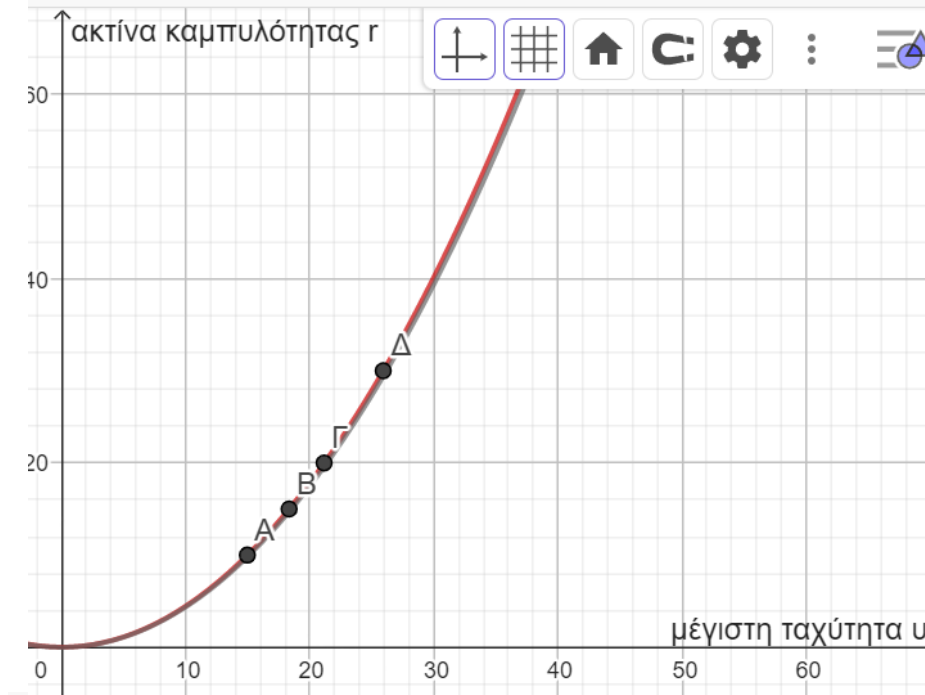
Να σχεδιάσετε την ακτίνα καμπυλότητας σε σχέση με τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα για διάφορες τιμές της κλίσης θ .

Μέσα από την εφαρμογή δεν έχουμε τη δυνατότητα καθορίζοντας την ταχύτητα να προσδιορίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς την οποία μπορεί να ακολουθήσει με αυτή ως μέγιστη ταχύτητα ο μοτοσυκλετιστής.

Επομένως εξακολουθούμε να προσδιορίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας και να προκύπτει ως αποτέλεσμα η ταχύτητα. Εμείς θεωρούμε όμως ότι η ταχύτητα είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή στην και η ακτίνα καμπυλότητας η εξαρτημένη.



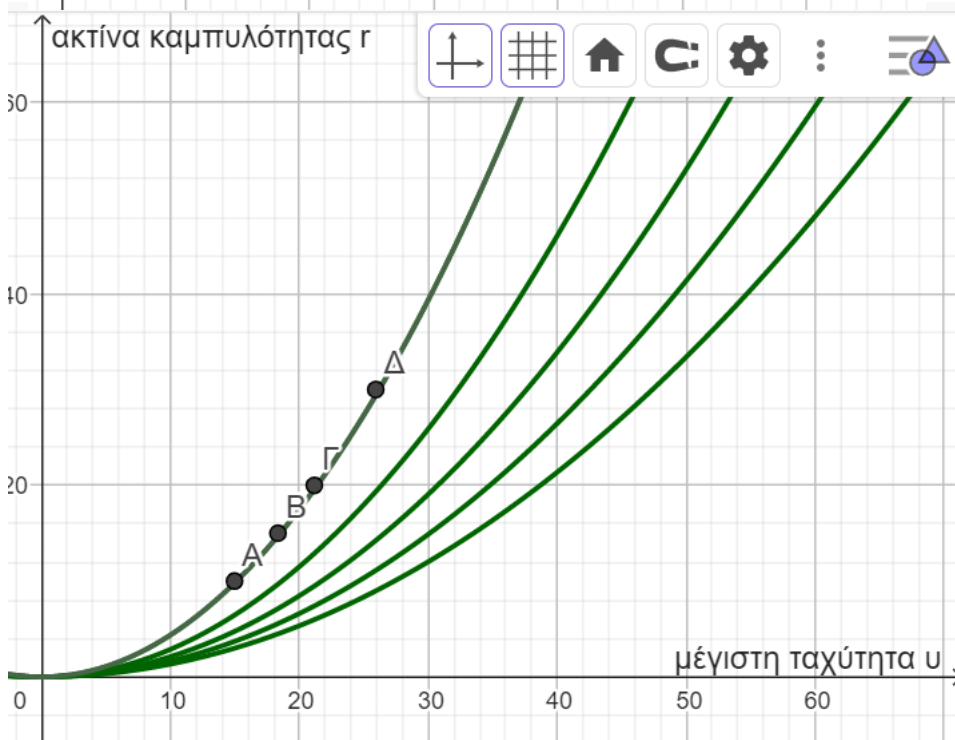
u	r
14.96	10
18.33	15
21.16	20
25.92	30



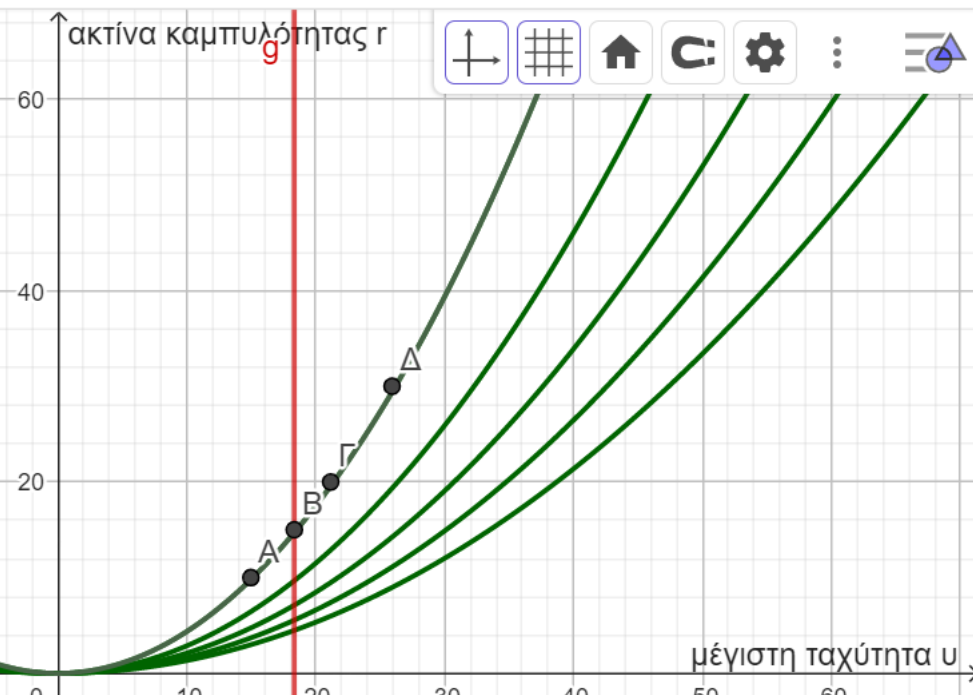
Με εφαρμογή του τύπου

$$v^2 = r g \epsilon \varphi \theta \Rightarrow r = \frac{v^2}{g \epsilon \varphi \theta}$$

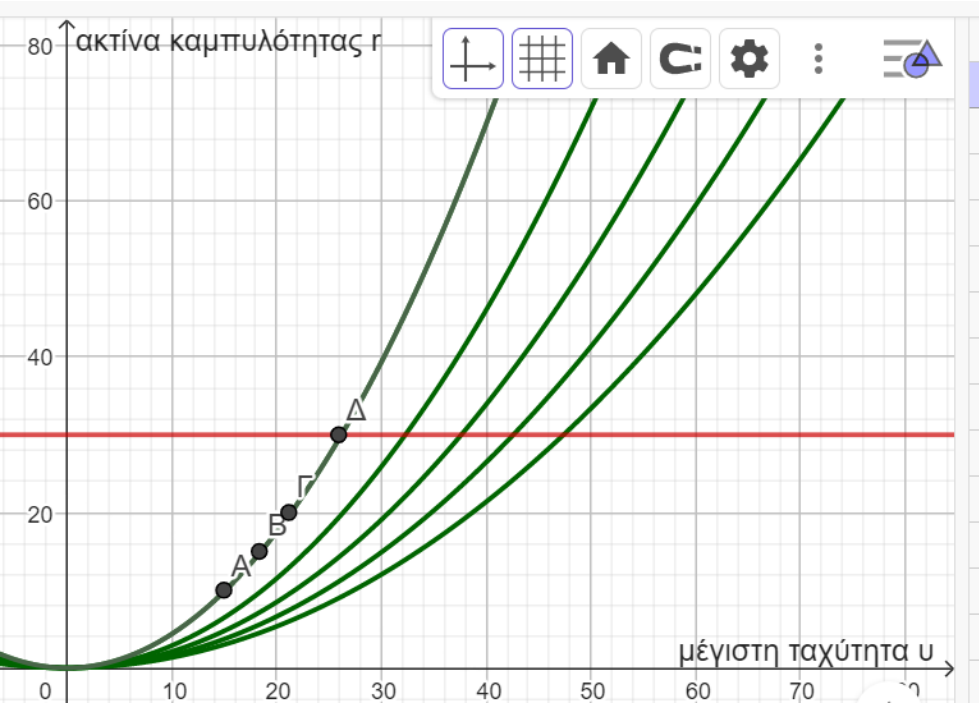
και κατάλληλη προσαρμογή στις μονάδες ώστε η ταχύτητα να εκφράζεται σε km/h παίρνουμε την γκρίζα γραφ. παράσταση.



Με την κλίση θ ως παράμετρο να παίρνει τιμές από 10 έως 30 με βήμα 5 σχεδιάζουμε την ακτίνα καμπυλότητας σαν συνάρτηση της ταχύτητας.



Ερ. Τι συμπέρασμα βγάζουμε για την ακτίνα καμπυλότητας που έχει η στροφή με δεδομένη τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει ο μοτοσυκλετιστής για διάφορες κλίσεις που έχει το οδόστρωμα;



Ερ. Τι συμπέρασμα βγάζουμε για τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει με δεδομένη ακτίνα καμπυλότητας για διάφορες κλίσεις του οδοστρώματος;

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ